

**EXERCICE : 1**

L'unité de longueur est le centimètre.

Soit ABC un triangle tels que : $BC = 8$ et $AB = AC = 5$ et soit O le milieu du segment [BC].

1/ a) Placer les points E, F et K tels que : $\overrightarrow{BE} = \frac{5}{3}\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{AO}$.

b) Montrer que $\overrightarrow{EF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AO}$.

2/ Les droites (EF) et (BC) se coupent en H.

a) Montrer que $\overrightarrow{EH} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AO}$.

b) En déduire que F est le milieu du segment [HK].

3/ Soit G et G' les centres de gravité respectifs des triangles BHK et CHK.

Montrer que les droites (GG') et (OA) sont perpendiculaires.

4/ Soit I et J les points tels que : $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$.

a) Justifier que $R = (O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est un repère orthonormé du plan.

b) Déterminer les coordonnées des points A, B, C et F dans le repère R.

c) Soit le point $M(4x, 3x + 3)$ où x est un réel.

i) Montrer que M appartient à la droite (AB).

ii) Déterminer x pour que M appartienne à la perpendiculaire à (AC) passant par F.

EXERCICE : 2

A 1/ Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $|x - 1| - 2|x| = 0$

2/ Résoudre dans $]-\infty, 0]$ l'inéquation : $\frac{x^3 + 1}{|x - 1| - 2|x|} \leq 1 - 3x$.

B 1/ a) Vérifier que pour tout entier naturel non nul n, on a : $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$

b) Calculer alors la somme $S = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \frac{9}{4^2 \cdot 5^2} + \frac{11}{5^2 \cdot 6^2} + \frac{13}{6^2 \cdot 7^2} + \frac{15}{7^2 \cdot 8^2} + \frac{17}{8^2 \cdot 9^2} + \frac{19}{9^2 \cdot 10^2}$

2/ a) Comparer : $n^2(n+1)^2$ et $(n+1)^4$.

b) En déduire que : $\frac{3}{2^4} + \frac{5}{3^4} + \frac{7}{4^4} + \frac{9}{5^4} + \frac{11}{6^4} + \frac{13}{7^4} + \frac{15}{8^4} + \frac{17}{9^4} + \frac{19}{10^4} < 1$